UNIVERSITETET I AGDER

FAKULTET FOR TEKNOLOGI OG REALFAG

E K S A M E N

Emnekode:	**MA-220**
Emnenavn:	**Tallteori, algebra, geometri og statistikk**
Dato:	12. desember 2019
Varighet:	09.00 – 14.00
Antall sider inkl. forside:	**8** inklusive vedlegg med formelsamling
Tillatte hjelpemidler:	Kalkulator uten minne og uten mulighet for kommunikasjon. Ett eget A4-ark med notater på begge sider.
Merknader:	Alle deloppgaver (a, b, c, d) vektes likt. Alle svar skal begrunnes og eventuelle utregninger skal alltid vises.

Oppgave 1

a) Bestem funksjonsuttrykket til den rette linjen som går igjennom punktene $(2, -3)$ og $(-6, -1)$. Begrunn hvorfor eller hvorfor ikke den rette linjen angir en sammenheng mellom to proporsjonale størrelser.

b) Bestem alle løsningene til andregradslikningen $\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2} = 0$ med fullstendige kvadraters metode.

Et andregradspolynom, g, har koeffisientene $a = \frac{1}{2}$, $b = -3$, $c = \frac{5}{2}$ og nullpunktene $x_1 = 1$ og $x_2 = 5$.

c) *Forklar* hvordan du kun *basert på opplysningene ovenfor* kan:

I. vite at funksjonen g må ha et ekstremalpunkt når $x = 3$

II. skissere grafen til funksjonen g i et koordinatsystem, *uten å gå via representasjonen tabell*. Lag også en skisse av grafen.

d) Gi eksempel på en aktivitet der elever arbeider med overgangen fra situasjon til tabell for en funksjon. Begrunn kort i henhold til definisjon av en funksjon, hvorfor aktiviteten du foreslår innebærer arbeid med en funksjon. Skriv *maks* en halv side.

Oppgave 2

a) Gi et algebraisk bevis for at produktet av to oddetall alltid er et oddetall.

Tre elever ble spurt om å bevise etterfølgende utsagn:

Når du multipliserer tre naturlige tall som følger etter hverandre, vil produktet være et multiplum av 6

Elev 1:

Hvis produktet er 6 må 3 og 2 være faktorer. Hvis det er 3 tall som følger ~~etter~~ hverandre, må et av de være i 3 gangen. Så må minst et av tallene være partall. Og partallene er i 2 gangen. Derfor må svaret ha minst en faktor 3 og en faktor 2 når vi ganger tre tall som følger etter hverandre.

Elev 2:

$1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 = 6 \cdot 4$

$4 \cdot 5 \cdot 6 = 120 = 6 \cdot 20$

Sånn kan vi fortsette

Elev 3:

$n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = (n^2 + n) \cdot (n+2)$

$n^3 + 2n^2 + n^2 + 2n$

Forkorter $\quad 1 + 2 + 1 + 2 = 6$

b) Vurder om hver av de tre elevenes bevis er gyldig.

Oppgave 3

a) Bestem tre heltall som er kongruente med 100 (mod 7).

En instruks for brøyting (måking) av snø i Oslo kommune angir at enkelte prioriterte sykkelfelt skal brøytes minimum hver 5. time under snøfall (Oslo kommune, u.å.). Brøytemaskinfører Thorsen ser sitt snitt til å tjene en god slant med penger. Han kjører på kontinuerlig døgnvakt, uten å bry seg om bestemmelser som arbeids- og hviletid. Han betales per brøyterunde han kjører med 5. timers mellomrom. Han gjennomfører første brøyting kl. 5, er ute hver 5. time ved å følge sin 24-timers digitale klokke, men Thorsen er en svime. Han glemmer selvfølgelig å registrere antall ganger han er ute og brøyter. Han vet at neste brøyterunde er kl. 13 og gjennomfører denne.

b) Sett opp en kongruenslikning og løs den for å svare på hvor mange brøyterunder Thorsen kan ha gjennomført. Brøyterunden kl. 13 er inkludert.
Dersom du ikke klarer å løse oppgaven med kongruenslikning kan også en annen løsningsmetode gi noe uttelling.

Oppgave 4

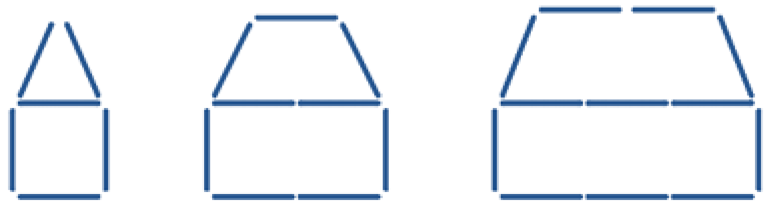
a) I pensum har vi arbeidet med fire multiplikative strukturer. Lag en tekstoppgave til hver av de fire strukturene der alle tekstoppgavene skal svare til å løse: $4 \cdot 6 = \_\_$

I lærebøker til småtrinnet kan vi finne oppgaver på formen: $6 + \_\_ = 14$

b) Gi eksempel på en utbredt misoppfatning som elever kan ha i algebra knyttet til likhetstegnet og gi ***to*** eksempler på hvordan oppgaven kan endres, for å utfordre denne misoppfatningen. Skriv *maks* en halv side.

Oppgave 5

Elever på 7. trinn arbeider med «Hustallene» der hus er bygd av fyrstikker:



Hus nr. 1 Hus nr. 2 Hus nr. 3

I arbeid med «Hustallene» ovenfor har tre elever kommet frem til etterfølgende eksplisitte formler for antall fyrstikker som trengs for å lage det n-te huset:

Elev 1: $2 + (n - 1) + (1 + 2n + 1)$
Elev 2: $4 + 3(n - 1) + 2$
Elev 3: $3(n + 1)$

a) Med utgangspunkt i figurene ovenfor, forklar hvordan hver elev kan ha kommet frem til sin formel.

Gitt tallfølgen a_n, der de fire første leddene i tallfølgen er 10, 13, 16, 19 …

b) Bestem en rekursiv og en eksplisitt formel for tallfølgen.

Oppgave 6

I læreplan i matematikk for 1.-10.trinn som trer i kraft høsten 2020 står det at det er et mål for opplæringen etter 3. trinn at eleven skal kunne «bruke kommutative, assosiative og distributive egenskaper til å utforske og beskrive strategier i multiplikasjon» (Utdanningsdirektoratet, 2019, s. 5).

a) En strategi kan være å dele opp regnestykket. Vis ***tre*** forskjellige måter du kan visualisere oppdelingen av regnestykket $12 \cdot 21$ med en arealmodell (rektangelmodell) for en elev.

Henrik, en elev på mellomtrinnet, er glad i å undersøke «store tall» og har oppdaget at tall som $123123, 379379$ og 290290 alle kan deles på tallene 7, 11 og 13. Eksemplene Henrik viser til er alle sekssifrede tall der de tre første sifrene repeteres én gang. Dette er tall som generelt kan skrives $abcabc$. Du kan være trygg på å svare Henrik at *ethvert sekssifret tall* der de tre første sifrene repeteres én gang, *alltid* vil være delelig på tallene 7, 11 og 13.

b) Forklar hvorfor du kan være trygg på det, ved å bruke at tall av denne typen kan deles opp på følgende måte:

$$abcabc = abc \cdot (1000 + 1) = abc \cdot 1001$$

c) Forklar hva som menes med største felles divisor (sfd) og minste felles multiplum (mfm), og gi eksempel på når sfd og mfm kan anvendes i matematikken som inngår i pensum på barnetrinnet.

d) Bestem $\text{sfd}(132{,}84)$ på ***to*** måter. Bestem også $\text{mfm}(132{,}84)$.

Oppgave 7

a) Begrunn at den diofantiske likningen $31x + 21y = 1770$ har heltallige løsninger.

b) Bestem alle heltallige løsninger av likningen gitt i a).

Du arbeider på et tivoli med ansvar for å telle hvor mange voksne og hvor mange barn som kjører karusellen *GO-GO-NO-GO* i løpet av en dag. Hver voksenbillett koster 31 kr og hver barnebillett koster 21 kroner. En dag glemmer du å telle antall voksne og barn, men du sjekker kassa som viser en inntjening på totalt 1770 kroner denne dagen.

c) Bestem *én* løsning for hvor mange voksne og hvor mange barn som kan ha kjørt karusellen.

d) Bestem alle positive løsninger, eventuelt begrunn at det ikke finnes flere positive løsninger enn den du fant i c).

Lykke til!

- Linn Flaten

Referanseliste:

Oslo Kommune. (u.å.). Vinterdrift av sykkelveier. Hentet 22.11.2019 fra: https://www.oslo.kommune.no/gate-transport-og-parkering/veiarbeid-og-vedlikehold/vinterdrift-av-sykkelveier/#gref

Utdanningsdirektoratet. (2019). *Læreplan i matematikk 1.-10. trinn* (MAT01-05). Hentet fra: https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf

Vedlegg: Formelsamling

Euklids algoritme og største felles faktor

Gitt to hele tall a og b. Bruk divisjonsalgoritmen og finn etter tur q_i og r_i inntil $r_k = 0$:

$$\begin{aligned}
a &= bq_1 + r_1, & 0 &\le r_1 < b \\
b &= r_1 q_2 + r_2, & 0 &\le r_2 < r_1 \\
r_1 &= r_2 q_3 + r_3, & 0 &\le r_3 < r_2 \\
&\vdots \\
r_{k-3} &= r_{k-2} q_{k-1} + r_{k-1}, & 0 &\le r_{k-1} < r_{k-2} \\
r_{k-2} &= r_{k-1} q_k.
\end{aligned}$$

Den minste positive resten, r_{k-1}, er da lik største felles faktor mellom a og b. Vi skriver dette som $\mathrm{sff}(a,b) = (a,b) = r_{k-1}$.

Kongruenser

To tall a og b som gir samme rest ved divisjon med n er kongruente med hensyn på n. Vi skriver

$$a \equiv b \pmod{n}$$

Da har vi at $n|(a-b)$ og det eksisterer et helt tall k slik at $a = b + kn$.

Regneregler for kongruenser

La a, b, c, d og n være hele tall.

- Dersom $a \equiv b \pmod{n}$ og $c \equiv d \pmod{n}$ så er $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ og $ac \equiv bd \pmod{n}$
- Dersom $a \equiv b \pmod{n}$ så er $a^k \equiv b^k \pmod{n}$.
- Dersom $ac \equiv bc \pmod{nc}$ så er $a \equiv b \pmod{n}$.
- Dersom $ac \equiv bc \pmod{n}$ og $(c,n) = 1$ så vil $a \equiv b \pmod{n}$.

Lineære kongruenslikninger

La a, b, c og n være hele tall.

- En lineær kongruenslikning $ax \equiv b \pmod{n}$ har løsning hvis og bare hvis $(a, n)|b$.
- Dersom $(a, n) = d$ har kongruensen $ax \equiv b \pmod{n}$, d inkongruente løsninger modulo n.

Diofantiske likninger

La a, b, c og n være hele tall. Gitt den diofantiske likningen $ax + by = c$, der $(a, b) = d$.

- Dersom x_o og y_o er en vilkårlig løsning av likningen så er alle løsningene gitt ved
  $$x = x_0 + \frac{b}{d}t \quad \text{og} \quad y = y_0 - \frac{a}{d}t \qquad der\ t \in \mathbb{Z}$$

Kvadratsetningene

- 1. kvadratsetning: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- 2. kvadratsetning: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- 3. kvadratsetning: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Abc-formelen for løsning av andregradslikninger

Likningen $ax^2 + bx + c = 0$ der *a*, *b* og *c* er reelle tall har løsningene

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$